

2. Tribus et Mesures

Exercice 1. Soit $E = \{a, b, c\}$ un ensemble à 3 éléments. Donner $\mathcal{P}(E)$ et l'ensemble des tribus de E .

Exercice 2. Pour E un ensemble, donner des conditions pour que les classes suivantes soient des tribus :

$$\{\emptyset, E\}, \mathcal{P}(E), \{\emptyset, \{x\}, E\}, \{\emptyset, \{x\}, \{x\}^c, E\} \text{ pour } x \in E,$$

les parties finies de E , les parties finies ou cofinies de E ,

les parties dénombrables de E , les parties dénombrables ou codénombrables de E .

Exercice 3 (Tribu image réciproque et tribu image). Soient E, F deux ensembles et $f : E \rightarrow F$ une application. Soient \mathcal{A} et \mathcal{B} tribus sur E et F respectivement.

(i) Montrer que $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B), B \in \mathcal{B}\}$ est une tribu sur E .

(ii) Justifier que $f(\mathcal{A})$ n'est en général pas une tribu sur F .

(iii) Montrer que $\{B, f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur \mathcal{A} .

Exercice 4. Justifier que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \sigma\{\{0\}, \{1\}, \dots, \{n\}\}$ n'est pas une tribu sur \mathbb{N} .

Exercice 5. Soit E un ensemble.

(i) Déterminer la tribu engendrée par les singletons $\mathcal{S} = \sigma(\{\{x\}, x \in E\})$.

(ii) Déterminer la tribu engendrée par les parties finies de E .

(iii) Supposons que E ait au moins deux éléments. Déterminer la tribu engendrée par les paires de E , i.e. $\mathcal{D} = \sigma(\{\{x, y\}, (x, y) \in E^2, x \neq y\})$.

(iv) Déterminer (et donner le cardinal) de la tribu engendrée par une partition finie de E .

Exercice 6. Soit a un réel. Montrer que δ_a définit bien une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ (masse de Dirac en a).

Exercice 7. On se place sur la tribu $\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}); A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ dénombrable}\}$ sur \mathbb{R} .

Montrer que $\mu : A \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } A \text{ est dénombrable,} \\ 1 & \text{sinon;} \end{cases}$ définit une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A})$.

Exercice 8. Soit μ une mesure sur (E, \mathcal{A}) espace mesurable. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathcal{A} . Montrer que :

(i) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.

(ii) si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$, si de plus :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \mu(A_{n_0}) < +\infty.$$

Exercice 9. Soit (E, \mathcal{A}) un espace mesurable. Soit $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ une application vérifiant :

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) si $A, B \in \mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \sqcup B) = \mu(A) + \mu(B)$,

(iii) pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, croissante pour l'inclusion, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)$.

Montrer que μ est une mesure sur (E, \mathcal{A}) .

Exercice 10. Soit E un ensemble. Soit (A_n) une suite de sous-ensembles de E .

(i) Interpréter les ensembles suivants :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcup_{n \geq 0} \bigcap_{k \geq n} A_k \quad \text{et} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} A_n = \bigcap_{n \geq 0} \bigcup_{k \geq n} A_k.$$

(ii) Soit (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$. Montrer que :

$$\mu \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) \quad \text{et} \quad \mu \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right) < +\infty \implies \mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n).$$

(iii) Montrer le premier lemme de Borel-Cantelli :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(A_n) < +\infty \implies \mu \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} A_n \right) = 0.$$

(iv) Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels. Que dire de l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}$ tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3^{-n}}{|x_n - x|} < +\infty$.

Exercice 11. Montrer qu'un ouvert de \mathbb{R} de mesure de Lebesgue nulle est vide.

Soit $\varepsilon > 0$. Construire un ouvert dense dans \mathbb{R} de mesure de Lebesgue inférieure ou égale à ε .

Exercice 12. Montrer qu'un borélien $A \subset [0, 1]$ tel que $\lambda([0, 1] \setminus A) = 0$ est dense dans $[0, 1]$.

Exercice 13. Soient (E, \mathcal{A}, μ) un espace mesuré, (F, \mathcal{B}) un espace mesurable et $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \rightarrow (F, \mathcal{B}, \mu)$ une fonction mesurable. Montrer que l'application

$$\begin{aligned} \mu_f &: \mathcal{B} &\longrightarrow & \overline{\mathbb{R}}_+ \\ &B &\longmapsto & \mu(f^{-1}(B)) \end{aligned}$$

définit une mesure sur (F, \mathcal{B}) , appelée mesure image de μ par f .

Exercice 14. Soit μ une mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant $\mu([0, 1]) = 1$ et invariante par translation :

$$\forall a \in \mathbb{R}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu(a + B) = \mu(B).$$

Pour $a < b$, déterminer $\mu(\{a\})$ et $\mu([a, b])$. En déduire $\mu([a, +\infty[)$.

Exercice 15 (Existence d'ensembles non mesurables). Considérons \sim la relation d'équivalence sur \mathbb{R} donnée par $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$. L'axiome du choix (non dénombrable) assure l'existence d'une application f qui à une classe d'équivalence associe l'un des éléments de la classe. Soit A l'ensemble contenant un élément de chaque classe ci-dessous :

$$A = \{f(\gamma) - \lfloor f(\gamma) \rfloor, \gamma \in \mathbb{R}/\sim\} \subset [0, 1].$$

Montrer que A n'est pas mesurable pour la mesure de Lebesgue (invariante par translation) en observant :

$$[0, 1] \subset \bigsqcup_{r \in \mathbb{Q} \cap [-1, 1]} (A + r) \subset [-1, 2].$$

Exercice 16. Soit $C_0 = [0, 1]$. On définit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence : à partir de C_n , union finie d'intervalles fermés disjoints, on obtient C_{n+1} en retirant à chaque intervalle de C_n son tiers médian. On pose ensuite

$$C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n.$$

(i) Déterminer la mesure de C .

(ii) Montrer que

$$C = \left\{ \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_n}{3^n}, (\alpha_n) \in \{0, 2\}^{\mathbb{N}^*} \right\}.$$

(iii) Montrer que C est un compact, d'intérieur vide, dont tous les points sont d'accumulation.